

## CONFIGURATIONS TRIDIMENSIONNELLES OPTIMALES EN RÉGIME SUPERSONIQUE

M. FENAIN

Ingénieur de Recherches à l'Office National d'Etudes et de Recherches  
Aéronautiques

### INTRODUCTION

La détermination des configurations optimales en régime supersonique a donné lieu à de nombreuses recherches, qu'il s'agisse de corps élancés, d'ailes seules ou d'ensembles ailes-fuselage.

Pour les ailes seules, les problèmes d'adaptation n'ont véritablement abouti, jusqu'alors, que dans des cas particuliers et, essentiellement, pour des ailes à bords d'attaque rectilignes. Quand la valeur de la traînée minimale a été évaluée sans trop de difficulté, la géométrie de l'aile correspondante n'a pu être déterminée ou ne l'a été qu'au prix d'un calcul difficile. Moyennant certaines restrictions, les problèmes ont été simplifiés. Ainsi, pour des données polynomiales, que ces données aient porté sur la géométrie de l'aile ou sur la répartition de pression, on a pu obtenir des résultats dont l'intérêt pratique n'est pas nié bien qu'ils ne correspondent pas aux optimums absolus.

Dans le cas des ensembles ailes-fuselage, les tentatives d'adaptation ont été faites également dans des cadres restreints de configurations, en supposant, par exemple, le fuselage voisin d'un cylindre indéfini.

Afin d'augmenter le nombre des configurations possibles, nous abordons les problèmes d'adaptation avec des formules nouvelles résultant d'une résolution des équations générales à partir d'un double développement asymptotique, l'un, dit "naturel," conduisant en première approximation à l'équation des ondes classique, l'autre, dit "artificiel," permettant de résoudre par itération les équations du développement naturel. Le premier pas de cette itération appliquée à l'équation des ondes correspond à la "théorie des corps élancés."<sup>1,2</sup>

Après avoir exposé cette technique de développement, nous esquissons ses possibilités d'emploi pour le problème d'adaptation que nous avons en vue, cela n'étant évidemment qu'un aspect bien particulier d'utilisation.

Pour les obstacles intérieurs au cône de Mach d'apex nous pouvons nous permettre d'adapter d'une manière approchée, mais avec la précision désirée, des ailes dont les bords d'attaque ne sont plus nécessairement rectilignes et même, nous pouvons, parmi certaines classes d'ailes, rechercher les meilleures formes en plan.

Afin de diminuer la complexité des problèmes posés, nous envisageons des cas, encore très généraux, où les effets de forme en plan et de données dans les sections transversales sont séparés (ailes à sections affines, répartitions affines de portance).

La technique proposée offre des possibilités d'adaptation de certains ensembles ailes-fuselage mais nous n'abordons pas ici cette exploitation de la méthode des développements asymptotiques.

### GENERALITES—EQUATIONS

Soit un corps, lié à un système d'axes trirectangle  $Ox_1, x_2, x_3$ , dans un écoulement permanent dont la vitesse  $\vec{U}_\infty$ , supersonique, fait un angle faible avec l'axe  $Ox_1$ . Les plans  $Ox_1, x_3$  et  $Ox_1, x_2$  sont ceux que la structure de l'obstacle impose a priori (plans de symétrie, plan voisin de l'aile) (Fig. 1).

On suppose que le corps ne déborde pas le cône de Mach de l'apex  $O$  et que la normale à sa surface est presque orthogonale à  $Ox_1$ .

Si on note  $\vec{U}$ ,  $p$ ,  $\rho$  et  $S$ , la vitesse, la pression, la masse volumique et l'entropie en un point de l'espace, les équations qui régissent l'écoulement sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad } \frac{U^2}{2} - \vec{U} \Delta \text{rot } \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (\text{Eq. du mouvement}) \\ \text{dir } \rho \vec{U} = 0 \quad (\text{Eq. de continuité}) \\ \vec{U} \text{ grad } S = 0 \quad (\text{Eq. de l'énergie}) \end{array} \right. \quad (1)$$

équations auxquelles il faut adjoindre les équations de choc.

Nous n'envisageons que le cas de gaz parfaits, à chaleurs spécifiques constantes dont le rapport est  $\gamma$  et nous supposons que l'écoulement est uniforme en amont de choc ( $\vec{U} = \vec{U}_\infty$ ).

En posant  $U = |\vec{U}|$ , les équations qu'il faut ajouter aux Eq. (1) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_c U_{c\nu} = \rho_\infty U_{\infty\nu} \quad (\text{conservation de la masse}) \\ U_{c\tau} = U_{\infty\tau} \\ \rho_c + \rho_c U_{c\nu}^2 = \rho_\infty + \rho_\infty U_{\infty\nu}^2 \end{array} \right\} \quad (\text{conservation de la} \quad (2) \\ \text{quantité de mouvement})$$

$$\left( a_c^2 + \frac{(\gamma - 1)}{2} U_c^2 = a_\infty^2 + \frac{(\gamma - 1)}{2} U_\infty^2 \right) \quad (\text{conservation de l'énergie})$$

où les indices  $\infty$  et  $c$  caractérisent les grandeurs en amont et immédiatement en aval du choc, les indices  $\nu$  et  $\tau$ , repérant les composantes normale et tangentielle par rapport au choc des vecteurs vitesses,  $a$  étant la célérité du son.

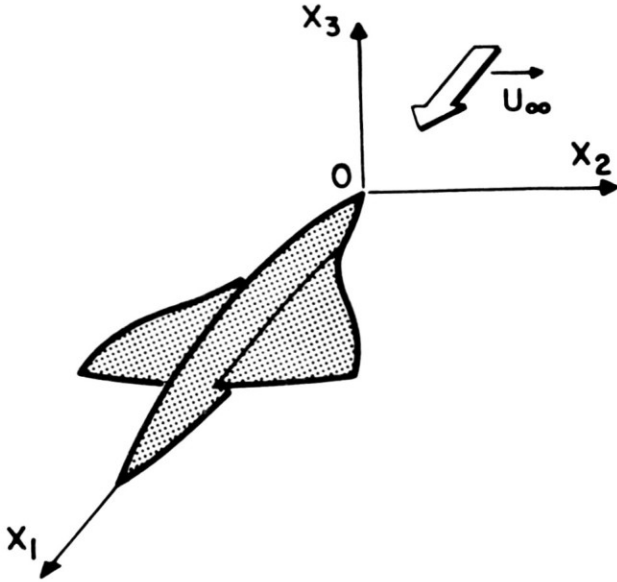


Fig. 1.

En aval du choc, on décompose la vitesse en deux termes,  $\vec{U}_\infty$  et  $U_\infty \vec{V}$ , mettant ainsi en évidence une vitesse de perturbation  $U_\infty \vec{V}$ , due à la présence de l'obstacle. On pose donc

$$\vec{U} = \vec{U}_\infty + U_\infty \vec{V}$$

et

$$\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  étant les vecteurs unitaires sur les axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ .

Pour simplifier, nous supposons, dans la suite, que  $\vec{U}_\infty = U_\infty \vec{i}$ .

*Conditions aux limites sur l'obstacle.* En fluide parfait, nous devons écrire la condition de glissement à la surface du corps, savoir

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3)$$

$\vec{n}$  étant un vecteur normal à cette surface.

### DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE NATUREL

On peut chercher à résoudre, par approximations successives, les équations (1), compte tenu des conditions (2) et (3), en effectuant un développement asymptotique par rapport à un paramètre *naturellement petit*, caractéristique de la forme de l'obstacle.

Pour effectuer ce développement asymptotique, que nous qualifierons de *développement asymptotique naturel*, nous introduisons un double système de

variables sans dimension. Les variables propres à l'étude au voisinage du corps sont dites "*variables proximales\* naturelles*" et le développement dans ce même voisinage, "*développement proximal naturel*." Le choix de ces variables dépend de la forme de l'obstacle.

Par opposition, les variables propres à l'étude loin du corps sont dites "*variables distales*"† et le développement correspondant, "*développement distal naturel*." Le développement distal étant fait par rapport au paramètre naturellement petit caractéristique de l'obstacle considéré, il est nécessaire de le qualifier de "naturel" alors que cette précision ne s'impose pas pour les variables distales car, pratiquement, ces variables distales sont les variables spatiales fondamentales  $x_1, x_2, x_3$  rapportées à une unité de longueur *commune* finie. Nous les notons  $t, x$  et  $y$  en posant

$$x_1 = lt, \quad x_2 = lx, \quad x_3 = ly \quad (4)$$

$l$  étant une longueur caractéristique *longitudinale* (sur  $Ox_1$ ). Dans ces variables, le cône de Mach issu de l'apex 0 a pour équation

$$t/r = \beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

$M_\infty$  étant le nombre de Mach de l'écoulement non perturbé ( $\vec{U} = \vec{U}_\infty$ ).

On note  $f$  une fonction  $f$  écrite en coordonnées distales. Les composantes de vecteur vitesse de perturbation sont développées, loin du corps, avec la convention de l'indice muet, sous la forme

$$u = \gamma_i u_i, \quad v = \delta_i v_i, \quad w = \epsilon_i w_i \quad (5)$$

Les  $\gamma_i, \delta_i, \epsilon_i$  ne dépendent que du paramètre de développement naturel, les  $u_i, v_i, w_i$  n'en dépendant pas. Par définition, quand ce paramètre tend vers zéro, on a

$$\gamma_i \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} \rightarrow 0$$

et des comportements identiques pour  $\delta_i$  et  $\epsilon_i$ .

Quelle que soit la structure de l'obstacle, les conditions de choc imposent

$$\gamma_i = \delta_i = \epsilon_i \quad (6)$$

Par ailleurs, il est facile de montrer que l'équation qui régit l'écoulement en première approximation distale naturelle est

$$\beta^2 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0$$

\* L'expression correspondante de la terminologie anglo-américaine est: "inner variables."<sup>3</sup>

† "Outer variables" dans la littérature anglo-américaine.<sup>3</sup>

On montre également qu'en aval du choc l'écoulement est, en première approximation, irrotationnel et que l'on peut introduire un potentiel de perturbation réduit  $\varphi_1$  dont les dérivées par rapport à  $t$ ,  $x$  et  $y$  sont  $u_1$ ,  $v_1$  et  $w_1$ , ce potentiel satisfaisant à

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

### AILES VOISINES D'UN PLAN

Considérons une aile de forme en plan symétrique, voisine du plan  $x_3 = 0$ , dont le bord d'attaque a pour équation

$$\left| \frac{x_2}{b} \right| = h \left( \frac{x_1}{l} \right) \quad (8)$$

et dont la cote est donnée par

$$\frac{x_3}{b} = e\bar{g} \left( \frac{x_1}{l}, \frac{x_2}{b} \right) \quad \text{pour} \quad \left| \frac{x_2}{b} \right| \leq h \left( \frac{x_1}{l} \right) \quad (9)$$

où  $b$ , longueur caractéristique transversale de même ordre que  $l$ , est la demi-envergure maximale et où  $e$  est le paramètre, sans dimension, *naturellement petit* (l'épaisseur relative maximale par exemple), par rapport auquel le développement naturel est effectué (Fig. 2).

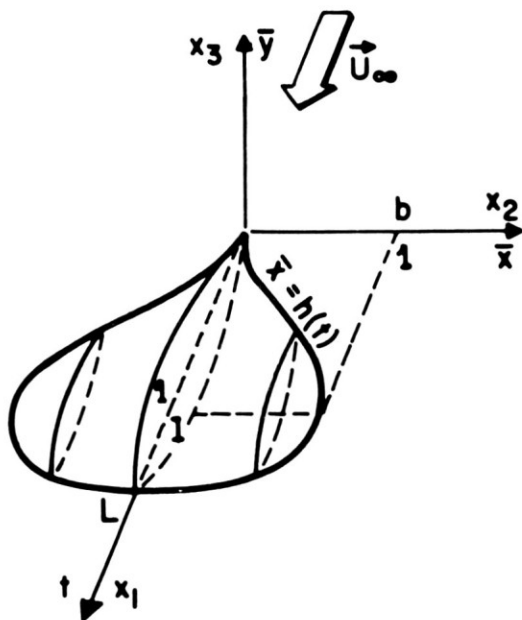


Fig. 2.

Plus précisément, il faudrait noter  $g^+$  et  $g^-$  les cotes réduites à l'extrados et à l'intrados.

Les variables proximales naturelles sont  $t$ ,  $x$  et  $y$ , définies par

$$x_1 = lt, \quad x_2 = b\bar{x}, \quad x_3 = eb\bar{y} \quad (10)$$

Dans ces variables, l'équation de la surface de l'aile est donc

$$\bar{y} = \bar{g}(t, \bar{x}) \quad \text{pour} \quad |\bar{x}| \leq h(t) \quad (\text{Fig. 2}) \quad (11)$$

Si on pose  $\lambda = b/l$ , les paramètres directeurs de la normale à la surface de l'aile sont  $e\lambda(\partial\bar{g}/\partial t)$ ,  $e(\partial\bar{g}/\partial x)$  et  $-1$ ; la condition de glissement (3) s'exprime alors, pour  $y = g$ , par

$$e\lambda(1 + \bar{u}) \frac{\partial\bar{g}}{\partial t} + e\bar{v} \frac{\partial\bar{g}}{\partial x} - \bar{w} = 0 \quad (12)$$

si on note  $f$  une fonction  $f$  écrite en coordonnées proximales.

Le développement proximal étant recherché, pour les composantes de la vitesse de perturbation, sous la forme

$$\bar{u} = \bar{\gamma}_i \bar{u}_i, \quad \bar{v} = \bar{\delta}_i \bar{v}_i, \quad \bar{w} = \bar{\epsilon}_i \bar{w}_i \quad (13)$$

la condition (12) impose

$$\bar{\epsilon}_1 = e \quad (14)$$

et s'écrit

$$(\bar{w}_1)_{y=g}^- = \lambda \frac{\partial\bar{g}}{\partial t} \quad (15)$$

L'équation qui régit l'écoulement est alors, en première approximation proximale,

$$\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

d'où l'on déduit, compte tenu de Eq. (15),

$$\bar{w}_1 = \lambda \frac{\partial\bar{g}}{\partial t} \quad (17)$$

En réalité, on a

$$\bar{w}_1^+ = \lambda \frac{\partial\bar{g}^+}{\partial t}, \quad \bar{w}_1^- = \lambda \frac{\partial\bar{g}^-}{\partial t}$$

Comme  $y = e\lambda y$ , le premier terme du développement de  $w$ , soit  $ew_1 = e\lambda(\partial\bar{g}/\partial t)$ , s'interprète comme le comportement pour  $y \rightarrow 0$ , sur  $|x| \leq \gamma h(t)$ , du premier terme du développement de  $w$ . On en déduit que

$$\gamma_1 = \delta_1 = \epsilon_1 = e \quad (18)$$

et que

$$w_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} \left( t, \frac{x}{\lambda} \right) \quad \text{sur} \quad \left| \frac{x}{\lambda} \right| \leq h(t), \quad y = 0 \quad (19)$$

On montre ensuite que  $\gamma = \delta_1 = e$ .

En résumé, en première approximation, dans le développement distal naturel, il existe un potentiel de perturbation  $\varphi_1$ , satisfaisant à l'équation des ondes (7), que l'on montre être nul sur le cône de Mach  $t = \beta r$ , et tel que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} \left( t, \frac{x}{\lambda} \right) \quad \text{sur} \quad y = 0, \quad \left| \frac{x}{\lambda} \right| \leq h(t)$$

On poursuit ainsi le développement naturel et l'on montre qu'il existe encore, en deuxième approximation distale, un potentiel  $\varphi_2$ , satisfaisant à une équation des ondes avec second membre dépendant de  $\varphi_1$ , et dont les dérivées doivent prendre des valeurs dépendant de  $\varphi_1$  sur  $t = \beta r$  d'une part, sur  $|x| \leq \lambda h(t)$  pour  $y = 0$  d'autre part. Au delà de la deuxième approximation naturelle, l'écoulement n'est plus irrotationnel.

Nous nous en tiendrons, ici, à la résolution de la première approximation naturelle.

## CORPS DE REVOLUTION SANS INCIDENCE

Pour un corps de révolution, d'axe  $Ox_1$ , on peut écrire l'équation de la méridienne sous la forme

$$\frac{r_0}{b} = \alpha \rho \left( \frac{x_1}{l} \right) \quad (r_0^2 = x_2^2 + x_3^2) \quad (20)$$

$\alpha$  étant un paramètre sans dimension petit et  $b$  une longueur caractéristique, de l'ordre de l'unité, qui n'est pas liée aux dimensions transversales du corps. Si l'on a en vue l'étude des combinaisons ailes-fuselage, on prend pour  $b$  la demi-envergure maximale de l'aile; si le corps de révolution est étudié seul, on prend  $b = l$ ,  $l$  étant toujours une longueur longitudinale.

Les variables proximales naturelles sont  $t, x, y$ , telles que

$$x_1 = lt, \quad x_2 = \alpha bx, \quad x_3 = \alpha by \quad (21)$$

On a donc

$$r_0 = \alpha br \quad (r^2 = x^2 + y^2) \quad (22)$$

et l'équation de la méridienne est

$$r = \rho(t) \quad (23)$$

Si les composantes de  $\vec{U}/U_\infty$  sont, en coordonnées cylindriques,  $1 + u, q, \omega$ , on a  $\omega = 0$  et la condition (3) s'écrit

$$q = \alpha \lambda \rho' (l + u) \quad \text{sur} \quad r = \rho \quad (\lambda = b/l) \quad (24)$$

les fonctions étant affectées du signe caractéristique des variables à l'aide desquelles elles sont exprimées.

Le développement proximal étant de la forme

$$u = \gamma_i u_i, \quad q = u_i q_i \quad (25)$$

on trouve que  $\mu_1 = \alpha$  et que  $q_1$ , qui doit satisfaire à

$$\frac{\partial q_1}{\partial r} + \frac{q_1}{r} = 0 \quad (26)$$

et, d'après Eq. (24), à

$$(q_1)_{r=\rho} = \lambda \rho' \quad (27)$$

est donné par

$$q_1 = \frac{\lambda \rho \rho'}{r} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sigma_0^{(1)}}{r} \quad (28)$$

$\sigma_0^{[1]}$  étant la dérivée par rapport à  $t$  de  $\sigma_0(t)$ , aire réduite d'une section transversale du corps.

D'une manière générale, nous notons  $f^{(n)}$  la dérivée  $n^{\text{ième}}$  par rapport à  $t$  d'une fonction  $f$ , dépendant de  $t$  et, éventuellement, d'autres variables.

La connaissance de  $q_1$  permet d'obtenir certaines informations sur les développements distaux

$$u = \gamma_i u_i \quad \text{et} \quad q = \mu_i q_i \quad (29)$$

On en déduit, en particulier, que

$$\gamma_1 = \mu_1 = \alpha^2 \quad (30)$$

et que

$$q_1 \cong \frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{\sigma_0^{(1)}}{r} \quad \text{quand} \quad r \rightarrow 0 \quad (31)$$

On montre ensuite, en revenant au développement proximal, que  $u$  comporte, en première approximation, deux termes indissociables,

$$u_{11} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sigma_0^{(2)} \quad \text{et} \quad u_{10} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[ \sigma_0^{(2)} \log r + a^{(1)}(t) \right] \quad (32)$$

auxquels correspondent les coefficients

$$\gamma_{11} = \alpha^2 \log \alpha \quad \text{et} \quad \gamma_{10} = \alpha^2 \quad (33)$$



La fonction  $a(t)$  est le terme indépendant de  $r/\lambda$  dans le développement de  $(2\pi/\lambda^2) \varphi_1$  au voisinage de  $r = 0$ :

$$\frac{2\pi}{\lambda^2} \varphi_1 \cong a(t) + \sigma_0^{(1)} \log \frac{r}{\lambda} + \dots \quad (34)$$

Pour résumer, en première approximation, et en variables distales, il existe, pour les corps de révolution sans incidence, un potentiel  $\varphi_1$  satisfaisant à l'équation des ondes

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = 0$$

ce potentiel étant nul sur  $t = \beta r$  et se comportant comme

$$\frac{\lambda^2}{2\pi} \sigma_0^{(1)} \log \frac{r}{\lambda}$$

au voisinage de  $r = 0$ .

Rappelons que pour le corps de révolution seul on peut écrire l'équation de la méridienne sous la forme  $r_0/l = \alpha \rho(x_1/l)$ , ce qui revient à faire  $\lambda = 1$  dans les expressions précédentes.

On peut poursuivre, comme pour les ailes, le développement naturel au-delà de la première approximation. Nous ne le ferons pas ici.

## REMARQUES

1. Le développement asymptotique naturel conduit à résoudre, en première approximation et en variables distales, l'équation des ondes classique, aussi bien pour les ailes que pour les corps de révolution. Cela a été établi depuis longtemps par d'autres techniques. Il faut noter que s'il n'y a jamais eu de divergences entre les auteurs au sujet de cette équation de première approximation, les conditions aux limites n'ont pas toujours été écrites correctement dans le cas des corps de révolution. Certains ont retenu partiellement, dans ces conditions aux limites, des termes appartenant en fait à la seconde approximation naturelle. Cette incohérence n'est pas condamnable en soi mais ne peut présenter d'intérêt que dans la mesure où elle simplifie la résolution, ce qui n'est jamais le cas.
2. Le potentiel  $\varphi$  est de l'ordre de  $e$  pour les ailes et de  $\alpha^2$  pour les corps de révolution. Dans l'un comme dans l'autre cas, le paramètre naturel de développement que nous avons choisi est directement lié à la cote maximale du corps, ou, ce qui revient au même, à la pente en direction de l'écoulement d'une section longitudinale parallèle au plan  $Ox_1, x_3$ . Quand le paramètre naturel tend vers zéro, la section transversale disparaît, dans le cas des ailes, par affinité et, dans le cas des corps de révolution, par homothétie. L'aire de cette section transversale est de l'ordre de  $e$  dans le premier cas et de l'ordre de  $\alpha^2$  dans le second. On voit bien que la perturbation est, par nature, de l'ordre de l'aire de la section transversale du corps. Il serait,

par conséquent, plus judicieux, pour que la notation soit cohérente, de choisir comme paramètre de développement naturel un paramètre directement lié à l'aire de la section transversale, que l'on pourrait noter identiquement, quelle que soit la forme du corps.

3. *Corps élancés.* Pour les corps, dits élancés, dont les deux dimensions transversales sont du même ordre et tendent simultanément vers zéro, le développement asymptotique naturel se fait, comme pour les corps de révolution, en introduisant, dans le plan transversal, des variables proximales rapportées à une longueur commune et à un paramètre commun.

### DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE ARTIFICIEL

Considérons, dans le cas des ailes, le problème de la détermination du potentiel  $\varphi_1$ . Que la donnée porte sur la géométrie de l'aile ou qu'elle porte sur la répartition de pression, la solution est connue depuis longtemps. Par un procédé de développement asymptotique, nous allons retrouver cette solution qui apparaîtra cette fois sous une forme nouvelle se prêtant, en définitive, à une exploitation facile.

Posons, d'une part,

$$\frac{2\pi}{\lambda^2} \varphi_1 = F \quad (35)$$

et, d'autre part,

$$\frac{x}{\lambda} = \bar{x} = x, \quad \frac{y}{\lambda} = e\bar{y} = y, \quad \frac{r}{\lambda} = r \quad \text{et} \quad \bar{g}(t, \bar{x}) = \bar{g}(t, x) \quad (36)$$

L'équation à laquelle  $F$  doit satisfaire est

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \epsilon^2 F^{(2)} \quad (37)$$

avec  $\epsilon = \beta\lambda$ .

La fonction  $F$  s'annule sur le cône de Mach  $t = \epsilon r$ ; par ailleurs, sur la coupure

$$y = 0, \quad |x| \leq h(t)$$

on a

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \overset{v}{F} = 2\pi \frac{\partial g}{\partial t}(t, x)$$

Les fonctions

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \overset{v}{F}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \overset{v}{F} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \overset{v}{F}$$

satisfont, comme  $F$ , à l'équation (37).

Nous cherchons une solution de Eq. (37) développée par rapport au paramètre  $\epsilon$  ( $\epsilon < 1$ ). Bien que  $\epsilon$  ne soit pas naturellement petit, puisque  $\beta$  et  $\lambda$  sont de

l'ordre de l'unité, nous allons procéder, comme dans le cas du développement naturel, en faisant disparaître, non plus l'obstacle soi-même, mais la coupure qui en est l'image. Il s'agit cette fois d'un *artifice de calcul*; c'est la raison pour laquelle de développement qui en résulte est dit "*développement artificiel*."

Il n'est pas question de démontrer la convergence de ce développement. S'il y a convergence, le nombre de termes à retenir apparaîtra clairement au stade de l'application pratique.

Notons que  $\epsilon$  tend vers zéro par  $\lambda$  et que, par conséquent, la coupure disparaît par homothétie et non par affinité.

Les variables  $t, x, y$ , liées à la coupure, sont dites "*variables proximales artificielles*."

Pour étudier l'écoulement loin de cette coupure, soit près du cône de Mach, nous utilisons les variables distales.

$$t, X = \beta x = \epsilon x, \quad Y = \beta y = \epsilon y, \quad R = \beta r = \epsilon r \tag{38}$$

Ces variables sont donc équivalentes, au facteur  $\beta$  près, aux variables distales utilisées dans le développement naturel. Elles sont, par conséquent, équivalentes aux variables spatiales fondamentales réduites.

En nouvelles variables distales, le cône de Mach a pour équation  $t = R$  et la coupure, image de l'aile, d'équation  $Y = 0, X = \epsilon h(t)$ , n'est représentée, à la limite, que par l'origine du plan transversal.

On note  $F$  la fonction  $F$  écrite à l'aide de  $X$  et  $Y$  ou de  $R$  et  $\theta = \arctan Y/X$  puisque ces variables sont équivalentes à  $x$  et  $y$  ou  $r$  et  $\theta = \arctan y/x$ .

L'équation à laquelle  $F$  doit satisfaire est

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = F^{(2)} \tag{39}$$

On pourrait procéder pas à pas, pour la recherche des développements artificiels, en utilisant un processus identique à celui suivi dans le développement naturel. Toutefois, l'équation étant beaucoup plus simple, nous utiliserons une tout autre technique.

En variables distales, on fait la transformation de Laplace.

$$G(p; X, Y) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t; X, Y) dt \tag{40}$$

Puisque  $F(-0; X, Y) = 0$  et  $F^{(1)}(-0; X, Y) = 0$ ,  $G$  satisfait à  $\Delta G = p^2 G$  dont la solution à variables séparées acceptable est

$$G = \sum_{n=0}^\infty K_n(pR) [A_n(p, \epsilon) \cos n\theta + B_n(p, \epsilon) \sin n\theta] \tag{41}$$

où  $K_n$  est la fonction de Bessel modifiée.

En variables proximales, on procède de même. Si

$$G(p; x, y) \square F(t; x, y) \tag{42}$$

$G$  satisfait à  $\Delta G = \epsilon^2 p^2 G$  et est de la forme

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\epsilon p r) [A_n(p, \epsilon) \cos n\theta + B_n(p, \epsilon) \sin n\theta] \quad (43)$$

cette solution n'étant autre que (41) pour  $R = \epsilon r$ .

Le développement de  $K_n(\epsilon p r)$ , pour  $\epsilon$  petit, comportant des termes  $(\epsilon/2)^q$  et  $(\epsilon/2)^q \log(\epsilon/2)$  ( $-n \leq q < \infty$ ), le développement asymptotique proximal artificiel le plus général, évitant les puissances négatives, ne comportant en définitive que des puissances paires de  $\epsilon$  et tel que le développement distal artificiel, qui n'en est pas indépendant, soit possible, est obtenu en posant

$$\left. \begin{matrix} A_n(p, \epsilon) \\ B_n(p, \epsilon) \end{matrix} \right\} = \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{2m} \sum_{\mu=0}^m \log^{\mu} \left( \frac{\epsilon}{2} \right) \left\{ \begin{matrix} A_{n,m,\mu}(p) \\ B_{n,m,\mu}(p) \end{matrix} \right. \quad (44)$$

En définitive, on peut écrire

$$G = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{2\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu+1} \log^{\mu} \left( \frac{\epsilon}{2} \right) G_{\nu,\mu}$$

les  $G_{\nu,\mu}$ , ordonnés par rapport à  $p$ , ne comportant que des termes produits de  $A_{n,m,\mu}(p)$  ou  $B_{n,m,\mu}(p)$  par  $p^j$  et  $p^j \log p$ .

Le retour à l'originale donne, formellement,

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{2\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu+1} \log^{\mu} \left( \frac{\epsilon}{2} \right) F_{\nu,\mu} \quad (45)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{\nu,\mu} = & \sum_{l=0}^{\nu-\mu} \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^n r^{2l-n}}{l!(l-n)!} \left\{ \left[ \frac{1}{2} (s_{l-n} + s_l) - \log r \right] \gamma_{n,\nu-l,\mu}^{(2l)} \right. \\ & \left. + C_{n,\nu-l,\mu}^{(2l+1)} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\nu-\mu} \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{(-1)^l (n-l-1)! r^{2l-n}}{l!} \gamma_{n,\nu-l,\mu}^{(2l)} \\ & - \sum_{l=0}^{\nu-\mu+1} \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^n r^{2l-n}}{l!(l-n)!} \gamma_{n,\nu-l,\mu-1}^{(2l)} \end{aligned} \quad (46)$$

où

$$s_l = \sum_{q=1}^l \frac{1}{q}, \quad s_0 = 0 \quad (47)$$

et où

$$\begin{aligned} \gamma_{n,\nu,\mu} &= \alpha_{n,\nu,\mu}(t) \cos n\theta + \beta_{n,\nu,\mu}(t) \sin n\theta \\ c_{n,\nu,\mu} &= \gamma_{n,\nu,\mu}(t; \theta) \star \log t \end{aligned} \quad (48)$$

les  $\gamma_{n,\nu,\mu}$  étant conventionnellement nuls pour  $\mu < 0$ .

Notons que, dans Eq. (46), les dérivées sont prises au sens des distributions mais que, dans la pratique, elles pourront être prises au sens habituel.<sup>5</sup>

Les  $F_{\nu,\mu}$  satisfont aux équations

$$\Delta F_{0,0} = 0, \quad \Delta F_{\nu,\nu+1} = 0 \quad (\nu \geq 0), \quad \Delta F_{\nu,\mu} = 4F_{\nu-1,\mu}^{(2)} \quad (49)$$

Le développement distal est obtenu selon une technique analogue. Le retour à l'originale n'étant pas indépendant de celui effectué dans le développement proximal artificiel,  $F$  s'exprime, en définitive, à l'aide des  $\gamma_{n,\nu,\mu}$ . On a

$$F = \sum_{\mu=0}^{\infty} \log^{\mu} \left( \frac{\epsilon}{2} \right) \sum_{\lambda=2\mu}^{\infty} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{\lambda} F_{\lambda,\mu} \quad (50)$$

avec

$$F_{\lambda,\mu} = \sum_{\nu=\mu}^{E(\lambda/2)} \int_0^{\text{arg ch } t/R} \text{ch} [(\lambda - 2\nu)\eta] \cdot \gamma_{\lambda-2\nu,\nu,\mu}^{(\lambda-2\nu)} (t - R \text{ ch } \eta, \theta) d\eta \quad (51)$$

où  $E(\lambda/2)$  est l'entier de  $(\lambda/2)$ ,  $\lambda$  étant ici un indice de sommation.

Qu'on travaille sur  $F$  ou sur  $F^u, F^v, F^w$ , les développements sont identiques. Les coefficients correspondant aux  $\gamma_{n,\nu,\mu}$  dans ces derniers développements vérifient, avec ces  $\gamma_{n,\nu,\mu}$ , des relations connues à l'avance.<sup>5</sup>

Notons que si l'on a affaire au seul problème portant (aile mince), la parité des solutions entraîne

$$\begin{cases} \alpha_{n,\nu,\mu} = \alpha_{n,\nu,\mu}^u = \alpha_{n,\nu,\mu}^v = \alpha_{n,\nu,\mu}^w = 0 \\ \beta_{2p,\nu,\mu} = \beta_{2p,\nu,\mu}^u = \beta_{2p+1,\nu,\mu}^v = \alpha_{2p+1,\nu,\mu}^w = 0 \end{cases}$$

En problème d'épaisseur (aile symétrique sans incidence),

$$\begin{cases} \beta_{n,\nu,\mu} = \beta_{n,\nu,\mu}^u = \beta_{n,\nu,\mu}^v = \alpha_{n,\nu,\mu}^w = 0 \\ \alpha_{2p+1,\nu,\mu} = \alpha_{2p+1,\nu,\mu}^u = \alpha_{2p,\nu,\mu}^v = \beta_{2p,\nu,\mu}^w = 0 \end{cases}$$

*Processus de résolution.* Les  $F_{\nu,\mu}$  satisfaisant à Eq. (49) et aux conditions aux limites sur la coupure, image de l'obstacle, ne sont définis qu'à une fonction harmonique près; toutefois l'indétermination qui subsiste encore peut être levée par la considération de Eq. (46), valable quand  $r \rightarrow \infty$ , qui impose la forme du comportement de  $F_{\nu,\mu}$  pour les grandes valeurs de  $r$ .

Cette résolution en variables proximales étant effectuée, les  $\gamma_{n,\nu,\mu}$  sont connus et, par conséquent, la connaissance du développement distal artificiel est complète, sans qu'il y ait à faire d'autres calculs.

En prenant comme variables indépendantes  $z = x + iy$  et  $\bar{z} = x - iy$  et en posant  $F_{\nu,\mu} = \Re e [\mathfrak{F}_{\nu,\mu}(t; z, \bar{z})]$ , les Eq. (49) se traduisent par

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{0,0} &= \mathfrak{F}_{0,0}(t; z); \quad \mathfrak{F}_{\nu,\nu+1} = \mathfrak{F}_{\nu,\nu+1}(t; z) \quad (\nu \geq 0) \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_{\nu,\mu}}{\partial z \partial \bar{z}} &= \mathfrak{F}_{\nu-1,\mu}^{(2)} \quad (\nu \geq 1, 0 \leq \mu \leq \nu) \end{aligned} \quad (52)$$

La connaissance de  $\mathfrak{F}_{0,0}$  satisfaisant aux conditions aux limites sur la coupure entraîne, de proche en proche, et par simple intégration, celle des termes suivants, à une fonction analytique près à chaque étape du calcul. Cette fonction analytique se détermine de manière que les conditions aux limites déjà réalisées ne soient pas perturbées et que, pour  $r$  grand,  $F_{r,\mu}$  puisse s'identifier avec Eq. (46).

### PROBLEME D'ÉPAISSEUR<sup>6</sup>

Considérons une aile épaisse, sans incidence, symétrique par rapport au plan  $x_3 = 0$  et par rapport au plan  $x_2 = 0$ .

Si nous prenons pour longueur longitudinale de référence  $l$  l'abscisse, sur  $Ox_1$ , de la section transversale d'envergure maximale  $2b$ , la projection du bord d'attaque est, en variables proximales artificielles,  $|x| = h(t)$ ,  $y = 0$  avec  $h(0) = 0$  et  $h(1) = 1$ ,  $h(t)$  étant de l'ordre de  $t_m$  ( $m \geq 1$ ) pour  $t \cong 0$ .

Si la donnée est la cote de l'aile, on a, sur la coupure  $y = 0$ ,  $|x| \leq h(t)$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \pm 2\pi \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \quad \text{pour} \quad y = \pm 0 \quad (53)$$

À  $t$  donné  $\partial g / \partial t$  est une fonction de  $x$  qui peut présenter des sauts pour  $|x| \leq h(t)$ .

Si  $F_{0,0}$  est décomposé en deux termes harmoniques  $P_{0,0}$  et  $Q_{0,0}$  et si  $P_{0,0} = \Re e(\mathfrak{P}_{0,0}(z))$  satisfait aux données sur la coupure, on a

$$\mathfrak{P}_{0,0} = 2 \int_{-h(t)}^{+h(t)} \frac{\partial g}{\partial t}(t, \xi) \log(z - \xi) d\xi$$

ou, puisque, d'après la condition de fermeture,  $g[t_1 h(t)] = g[t_1 - h(t)] = 0$

$$\mathfrak{P}_{0,0} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^h g(t, \xi) \log(z - \xi) d\xi \quad (54)$$

On décompose de même les termes polyharmoniques

$$F_{\nu,0} = P_{\nu,0} + Q_{\nu,0} = \Re e[\mathfrak{P}_{\nu,0}(z, \bar{z}) + \mathfrak{Q}_{\nu,0}(z, \bar{z})]$$

Notons  $L_\nu(x)$  la primitive  $\nu^{\text{ième}}$  de  $\log x$ , soit

$$L_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!} (\log x - s_\nu) \left( s_\nu = \sum_{p=1}^{\nu} \frac{1}{p}; s_0 = 0 \right)$$

Les termes  $\mathfrak{P}_{\nu,0}(z, \bar{z})$  donnés par

$$\mathfrak{P}_{\nu,0} = 2 \frac{\partial^{2\nu+1}}{\partial t^{2\nu+1}} \int_{-h}^h g(t, \xi) \frac{(\bar{z} - \xi)^\nu}{\nu!} L_\nu(z - \xi) d\xi \quad (\nu \geq 0) \quad (55)$$

vérifient les équations d'intercompatibilité

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{P}_{\nu,0}}{\partial z \partial \bar{z}} = \mathfrak{P}_{\nu-1,0}^{(2)}$$

Ils sont tels que  $\partial(P_{\nu,0}/\partial y) = Tm[\partial(P_{\nu,0}/\partial z) - \partial(P_{\nu,0}/\partial z)] = 0$  pour  $y = 0$ , si  $\nu \geq 1$ ; par conséquent, les  $P_{\nu,0} (\nu \geq 1)$  ne perturbent pas les données aux limites.

De la comparaison des développements pour  $r$  grand de  $P_{\nu,0}$  et  $F_{\nu,0}$  on déduit que  $\beta_{n,\nu,0} = 0$  et que

$$\alpha_{n,\nu,0} = -2 \epsilon_0^n C_{2\nu+n} \frac{d^{2\nu+1}}{dt^{2\nu+1}} \int_{-h}^h \frac{\xi^{2\nu+n}}{(2\nu+n)!} g(t, \xi) d\xi$$

où  $\epsilon_0^0 = 1$  et  $\epsilon_0^n = 2$  pour  $n \neq 0$ . Comme  $g(t, -\xi) = g(t, \xi)$ , les  $\alpha_{2p+1,\nu,0}$  sont nuls.

Si on pose

$$\bar{\sigma}_{2p}(t) = 2 \int_{-h(t)}^{+h(t)} \frac{\xi^{2p}}{(2p)!} g(t, \xi) d\xi \tag{56}$$

les  $\alpha_{n,\nu,0}$  sont donnés par

$$\begin{cases} \alpha_{2p+1,\nu,0} = 0 \\ \alpha_{2p,\nu,0} = -\epsilon_0^p C_{2\nu+2p\nu} \bar{\sigma}_{2\nu+2p}^{(2\nu+1)}(t) \end{cases} \tag{57}$$

Les  $\sigma_{2p}$  sont les moments, pour les sections transversales, de la cote réduite  $g$ ,  $\sigma_0$  étant l'aire réduite d'une section transversale. Les moments et l'aire non réduits s'obtiennent en multipliant  $\sigma_{2p}$  et  $\sigma_0$  par  $eb^{2p+2}$  et  $eb^2$ .

On détermine les  $Q_{\nu,0}$  par simple différence des développements, pour  $r$  grand, de  $F_{\nu,0}$  et  $P_{\nu,0}$ . D'où

$$Q_{\nu,0} = \sum_{l=0}^{\nu} \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^n r^{2l-n} \cos n\theta}{l!(l-n)!} \left[ \log t_* \alpha_{n,\nu-l,0}(t) \right]^{(2l+1)} \tag{58}$$

On vérifie que ces termes ne modifient pas les données aux limites.

Les  $F_{\nu,\mu}$ , pour  $\mu \neq 0$ , se calculent par les mêmes procédés. On trouve, à partir de  $F_{0,1} = -\alpha_{0,0,0}$ ,

$$F_{\nu,1} = -\sum_{l=0}^{\nu} \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^n r^{2l-n} \cos n\theta}{l!(l-n)!} \alpha_{n,\nu-l,0}^{(2l)} \tag{59}$$

et l'on en déduit que les  $\gamma_{n,\nu,1}$  sont nuls.

Compte tenu des différentes conditions à satisfaire, on montre, de proche en proche, que

$$F_{\nu,\mu} = 0 \quad \text{pour} \quad \mu \geq 2 \tag{60}$$

En définitive, pour l'aile épaisse, doublement symétrique, sans incidence, dont la forme en plan est limitée par  $|x_2| = bh(t)$  et dont la cote est  $x_3 = \pm ebg(t, x)$ , le potentiel de perturbation est connu complètement, en première approximation, sous forme développée, par

$$\varphi = \frac{e\lambda^2}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \left[ F_{\nu,0} + \log\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \cdot F_{\nu,1} \right] \left(\epsilon = \frac{\beta b}{l}\right) \tag{61}$$

où les  $F_{\nu,0}$  et  $F_{\nu,1}$  sont tous exprimés à l'avance, en fonction de  $h(t)$  et de  $g(t, x)$ , à l'aide des variables

$$t = \frac{x_1}{l}, \quad x = \frac{x_2}{b}, \quad y = \frac{x_3}{b}$$

ou

$$t, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

On en déduit le coefficient de pression,  $C_p = -2u$ , soit, sur l'aile,

$$C_p = \frac{-e\lambda^2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon^{2\nu} \frac{C_{2\nu}}{2^{2\nu}} \left[ l_{2\nu} + \sum_{p=0}^{\nu} \frac{x^{2\nu-2p}}{(2\nu-2p)!} \left\{ (\log \epsilon - S_\nu) \bar{\sigma}_{2p} - \bar{s}_{2p}^{(1)} \right\} \right]^{(2\nu+2)} \quad (62)$$

avec

$$l_{2\nu} = 2 \int_{-h}^h g(t, \xi) L_{2\nu}(x - \xi) d\xi$$

$$S_\nu = \log 2 - \sum_{p=1}^{2\nu} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$$

$$\bar{s}_{2p} = \bar{\sigma}_{2p}(t)_* \log t$$

En coordonnées distales, donc, pratiquement, en coordonnées spatiales, le potentiel de perturbation (potentiel réduit) est donné, en première approximation, par

$$\varphi = \frac{-e\lambda^2}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{2\nu} \sum_{p=0}^{\nu} \epsilon_0^p C_{2p}^{r-p} \cos(2p\theta) \int_0^{\text{arctg } ch(t/r)} Ch(2p\eta) \bar{\sigma}_{2\nu}^{(2\nu+1)}(t - R ch \eta) d\eta \quad (63)$$

où

$$t = \frac{x_1}{l}, \quad R = \frac{\beta}{l} \sqrt{x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x_3}{x_2}$$

Le potentiel de perturbation, pour une aile épaisse sans incidence, peut donc être obtenu par composition de sources et de multipôles placés sur l'axe  $Ox_1$  et dont l'intensité est fonction des dérivées d'aire ou de moments de cote réduits des sections transversales.

Notons que si  $h = 0(t)$  pour  $t \cong 0$ , on a

$$\bar{\sigma}_{2\nu}^{(q)}(0) = 0 \quad \text{pour} \quad q \leq 2\nu + 1 \quad (64)$$



## PROBLEME DE PORTANCE

Dans le cas de l'aile sans épaisseur, on se donne le potentiel sur l'aile.<sup>6</sup> Avec  $F = \pm F^*(t, x)$  sur  $|x| \leq h(t)$  pour  $y = \pm 0$ , le problème est formellement identique à celui que l'on aurait traité dans le cas précédent si l'on avait recherché non pas  $F$  mais

$$\overset{w}{F} = \frac{\partial F}{\partial y} = i \left( \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right)$$

Le potentiel est donc de la forme Eq. (61) où les  $F_{\nu,0}$  et  $F_{\nu,1}$  sont obtenus en dérivant les précédents par rapport à  $y$  et en remplaçant  $\partial g/\partial t$  par  $F^*$ .

Dans le cas présent, on a

$$\alpha_{n,\nu,0} = 0, \quad \beta_{2p,\nu,0} = 0$$

et les  $\beta_{2p+1,\nu,0}$  sont directement proportionnels aux *moments de portance réduits* des sections transversales.

En dérivant  $F$  par rapport à  $y$  on obtient  $w$  qu'on peut exprimer, en particulier, sur le plan  $y = 0$ . L'intégration par rapport à  $t$  fournit le cote en chaque point de l'aile.

La pression est donnée directement à partir de  $F^{(1)}$ .

## REMARQUES

1. Les problèmes d'épaisseur et de portance tels que nous les avons envisagés conduisent à des développements proximaux artificiels ne comportant pas de puissance de  $\log \epsilon$  supérieure à l'unité et à des développements distaux artificiels ne comportant que des puissances de  $\epsilon$ . Si on se donne, en problème portant, non plus le potentiel mais la cote de l'aile (incidence, lois de vrillage et de cambrure), les développements artificiels sont alors de la forme la plus générale prévue Eqs. (45), (50). Il en est de même pour le problème d'épaisseur quand la donnée porte sur la répartition de pression.

Ces deux cas plus complexes peuvent être traités soit directement, mais au prix de calculs plus fastidieux, soit en inversant les solutions des deux problèmes envisagés précédemment.

2. La technique de développement artificiel n'est évidemment possible que si l'image de l'obstacle sur laquelle il faut satisfaire aux conditions aux limites dans le développement distal naturel peut encore faire l'objet d'une contraction. Pour les corps élancés, seuls les développements naturels sont possibles.
3. Les solutions que nous avons données, sous forme développée, sont complètes. Pratiquement, si l'obstacle n'est pas trop voisin du cône de Mach d'apex, il suffit de retenir les tout premiers termes du développement. La première étape ( $\nu = 0$ ) correspond d'ailleurs à la théorie des corps élancés,<sup>1,2</sup> les deux premières étapes ( $\nu = 0, \nu = 1$ ) correspondant à la "not-so-slender body theory."<sup>4</sup> Pour les ailes à bords d'attaque rectilignes,

les nombreuses comparaisons que nous avons faites, entre solutions linéarisées exactes et solutions développées, ont montré qu'il est souvent suffisant de se limiter à  $\nu \leq 3$ , que ce soit pour les efforts locaux, les efforts globaux ou la géométrie de l'aile quand celle-ci n'est pas donnée a priori. A titre d'exemple, on voit, sur la planche 1, la variation de la traînée de portance  $C_x$  en fonction de  $\epsilon$  pour l'aile en delta sur laquelle les répartitions transversales de  $C_p$  sont des constantes proportionnelles à  $t$ .

## RECHERCHE DES CONFIGURATIONS OPTIMALES

Le potentiel de perturbation étant connu par un développement en  $\epsilon$ , on exprime les efforts globaux sous une forme analogue. Les expressions obtenues généralisent les formules de la théorie des corps élancés. A titre d'exemple, pour une aile épaisse, doublement symétrique, de pente finie au bord d'attaque, fermée le long du bord de fuite, celui-ci étant normal à la direction de l'écoulement non perturbé (Fig. 3), le coefficient de traînée d'onde est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{C_x}{\Lambda} = & -\frac{1}{8\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon^{2\nu} \frac{C_{2\nu}^{\nu}}{2^{2\nu}} \sum_{p=0}^{\nu} \int_0^1 \int_0^1 \bar{\sigma}_{2\nu-2p}^{(2\nu-2p+2)}(t) \bar{\sigma}_{2p}^{(2p+2)}(t) \log \\ & |t - \tau| dt d\tau + \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon^{2\nu} \frac{C_{2\nu}^{\nu}}{2^{2\nu}} \sum_{p=0}^{\nu} \sum_{q=2p}^{2\nu} (-1)^q \bar{\sigma}_{2\nu-2p}^{(2\nu+1-q)}(1) \\ & \int_0^1 \bar{\sigma}_{2p}^{(q+2)}(\tau) \log(1 - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \epsilon^{2\nu} \frac{C_{2\nu}^{\nu}}{2^{2\nu}} \sum_{p=0}^{\nu-1} \sum_{q=2p+2}^{2\nu} (-1)^q \\ & \bar{\sigma}_{2p}^{(q)}(0) \sum_{r=0}^{2\nu-q} (2\nu - q - r)! \bar{\sigma}_{2\nu-2p}^{(r+1)}(1) - \frac{1}{8\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \epsilon^{2\nu} \frac{C_{2\nu}^{\nu}}{2^{2\nu}} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} (\log \epsilon - S_{\nu}) \sum_{p=0}^{\nu} \sum_{q=0}^{\nu} (-1)^q \epsilon_0^q \bar{\sigma}_{2\nu-2p}^{(\nu+1-q)}(1) \bar{\sigma}_{2p}^{(\nu+1+q)}(1) + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon^{2\nu} \frac{C_{2\nu}^{\nu}}{2^{2\nu}} \\ \int_0^1 dt \int_0^{h(t)} g(t, x) dx \frac{\partial^{2\nu+3}}{\partial t^{2\nu+3}} \int_{-h(t)}^{+h(t)} g(t, \xi) L_{2\nu}(x - \xi) d\xi \end{aligned}$$

où  $\Lambda = 4b^2/S$  est l'allongement ( $S =$  aire de la forme en plan).

Cette forme développée de coefficient de traînée se prête à la recherche des configurations optimales.

On se propose de minimiser  $C_x/\Lambda$  moyennant certaines conditions (volume donné par exemple).

Si  $h(t)$  est fixé, on peut faire porter le problème de variation sur la cote  $g(t, x)$  en recherchant cette dernière, pas à pas, sous forme d'un développement en  $\epsilon$ . En retenant, de proche en proche, quelques termes au-delà du premier pas, on améliore la forme fournie par la théorie des corps élancés.

On peut également, parmi certaines familles d'ailes, rechercher la meilleure forme en plan. Il suffit, par exemple, de supposer  $h(t)$  polynomial, introduisant ainsi, selon le degré du polynôme, plus ou moins de paramètres que la résolution du problème d'adaptation précise a posteriori.

Les ailes à sections transversales affines forment une classe particulièrement intéressante car les différents arbitraires qui subsistent dans la configuration interviennent séparément. En effet, si

$$g(t, x) = D(t) g(X), \quad X = \frac{x}{h} \tag{66}$$

avec

$$g(0) = 1, \quad g(1) = 0, \quad g(X) = g(X - )$$

et

$$D(0) = 0, \quad D(1) = 0$$

les moments de cote s'écrivent

$$\bar{\sigma}_{2p} = \sigma_{2p} h^{2p+1} D = \sigma_{2p} H_{2p}(t) \tag{67}$$

où

$$\sigma_{2p} = 4 \int_0^1 \frac{\lambda^{2p}}{(2p)!} g(\lambda) d\lambda \tag{68}$$

On fait ainsi apparaître, séparément, dans  $\sigma_{2p}$ , d'une part une fonction de  $t$ ,  $H_{2p}$ , comprenant l'expression qui définit le bord d'attaque  $h(t)$  et celle qui définit le profil médian  $D(t)$ , d'autre part un moment de cote unitaire,  $\sigma_{2p}$ , indépendant de  $t$ .

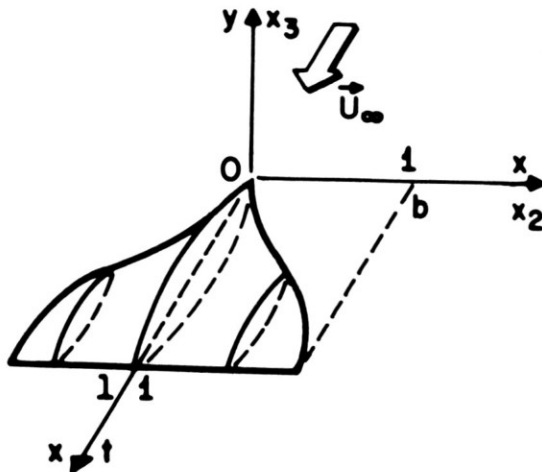


Fig. 3.

Dans le cas présent, le dernier terme de Eq. (65) peut s'écrire, entre autres formes,

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon^{2\nu} \frac{C_{2\nu}^{\nu}}{2^{2\nu}} \int_0^1 H_0 [H_{2\nu} \log h]^{(2\nu+3)} dt \sum_{p=0}^{\nu} \sigma_{2p} \sigma_{2\nu-2p} + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon^{2\nu} \frac{C_{2\nu}^{\nu}}{2^{2\nu}} \tau_{2\nu} \int_0^1 H_0 H_{2\nu}^{(2\nu+3)} dt \quad (69)$$

où

$$\tau_{2\nu} = \int_{-1}^1 g(X) dX \int_{-1}^1 g(\lambda) L_{2\nu}(X-\lambda) d\lambda \quad (70)$$

En définitive,  $C_x/\Lambda$  s'exprime sous une forme où les effets sont séparés. Si  $h$  et  $D$  sont fixés, on peut déterminer la section transversale optimale. Si  $g(\lambda)$  est donnée, auquel cas les  $\sigma_{2p}$  et  $\tau_{2p}$  sont des nombres, on recherche soit  $D(t)$  à  $h$  fixé, soit  $h(t)$  à  $D$  fixé.

Le problème est encore simplifié si on établit une liaison entre  $D$  et  $h$ ; par exemple, si  $D$  est proportionnel à  $hh'$  [ $h'(1) = 0 \rightarrow D(1) = 0$ ], les fonctions  $H_{2p}$  sont proportionnelles à  $(h^{2p+3})^{(1)}$ . Avec des conditions restrictives de ce genre, il ne subsiste donc que deux fonctions inconnues  $h$  et  $g$  intervenant séparément.

Dans la même classe des ailes à sections affines, mais pour les formes en plan limitées par deux arcs continus symétriques [ $h(0) = 0$ ,  $h(L) = 0$ ,  $h'(1) = 0$ ] (Fig. 4), on simplifie notablement les formules d'efforts locaux ou d'efforts globaux si l'on admet une relation de la forme

$$D = h^m \quad (m \text{ entier } \geq 1)$$

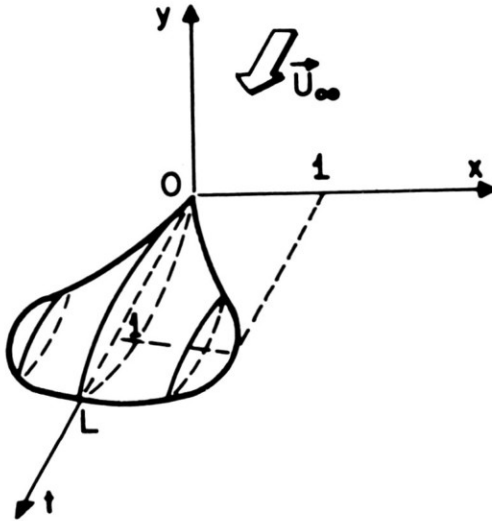


Fig. 4.

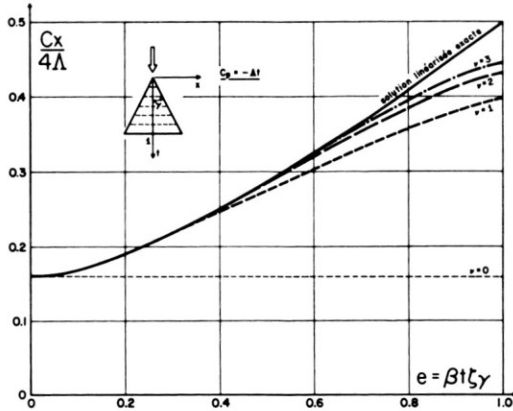


Fig. 5.

entre la fonction  $D$  et la fonction  $h$ . Puisqu'alors

$$\bar{\sigma}_{2p} = \sigma_{2p} h^{2p+m+1}$$

$h$  et  $g$  restent, cette fois encore, les seules inconnues.

Notons que si les bords d'attaque sont arrondis, plus précisément si  $g = 0(\sqrt{h^2 - x^2})$  quand  $x^2 \rightarrow h^2$ , il faut tenir compte dans l'évaluation du  $C_x$  de la contribution due à la singularité de bord d'attaque.

L'analogie formelle entre les problèmes d'épaisseur quand la géométrie est donnée et les problèmes de portance quand la répartition de pression est connue entraîne une similitude des formules de traînée d'onde et de traînée de portance.

Certaines conditions étant imposées (donnée du volume ou donnée de la portance et du moment de tangage), la recherche des configurations optimales peut être menée, dans les deux cas, selon le même processus, et les mêmes restrictions sur la forme des données aux limites peuvent être faites. Ainsi, en problème de portance, on peut supposer, pour simplifier, que les répartitions transversales de pression que l'on s'impose sont affines.

## CONCLUSION

Nous avons donné un bref aperçu des possibilités d'adaptation des configurations d'obstacles tridimensionnels en prenant comme exemple l'aile voisine d'un plan et en limitant le nombre des restrictions simplificatrices. En fait, la méthode qui a permis d'obtenir, dans les cas considérés, des formules développées, dont l'exploitation est relativement simple, a un champ d'application plus étendu. On peut, en particulier, envisager l'étude des ensembles ailes-fuselage, ceux-ci se prêtant à la technique du développement artificiel, le développement se faisant cette fois par rapport à un paramètre lié à l'allongement de l'ensemble.

Remarquons que les formules auxquelles on aboutit en procédant par développement font intervenir des dérivées, par rapport à la variable longitudinale,

de fonctions où cette variable joue, pratiquement, le rôle d'un paramètre (moments de cote des sections transversales par exemple). Les formules telles qu'elles ont été obtenues ne peuvent donc être utilisées que sous réserve d'analyticité. Toutefois, on peut tenir compte, comme en théorie des corps élancés,<sup>2</sup> des discontinuités des dérivées longitudinales et envisager, en particulier, des ensembles ailes-fuselage pour lesquels le bord d'attaque de l'aile n'a pas son origine à l'apex de l'obstacle.

Quand les solutions de première approximation sont connues sous forme développée, on peut rechercher, sous la même forme, des solutions de seconde approximation, en procédant toujours par développement artificiel. Comme, en pratique, les tout premiers termes des développements artificiels donnent des valeurs approchées suffisantes des solutions linéarisées exactes, il est certainement plus avantageux de se contenter de solutions approchées de l'équation des ondes et d'améliorer ces solutions en retenant quelques termes du développement artificiel de deuxième approximation plutôt que de s'astreindre à rechercher les solutions complètes de première approximation. On peut donc envisager de traiter, toujours dans le même esprit, des problèmes d'adaptation où interviendraient, simultanément, les termes principaux des développements artificiels des première et deuxième approximations.

## BIBLIOGRAPHIE

1. Jones, R. T., *N.A.C.A. Report* No. 835.
2. Ward, G. N., *Linearized Theory of Steady High Speed*, Cambridge, Cambridge University Press, 1955.
3. Kaplun, S., and P. A. Lagerstrom, *J. Math. Mech.*, 6, 1957, p. 585.
4. MacAdams, C., and W. R. Sears, *J.A.S.* 20, 1953, p. 85.
5. Fenain, M., and J. P. Guiraud, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 253, 1961, p. 2314.
6. Fenain, M., *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 253, 1961, p. 2634.

*Author:* M. Fenain

*Discussor:* M. Landahl, Mass. Inst. Technology

I wonder if you have tried your expansion scheme for a non-planar configuration, say a wing-body combination. Some years ago I developed a second-order theory for oscillatory lifting flow at  $M = 1$  in which the shape of the cross section was kept constant and the flow expanded in powers of the aspect ratio using the method of Adams and Sears. The difficulties encountered lay mainly in satisfying the tangency condition on the body. The work was, later on, extended to supersonic unsteady flow by Ashley and Zararian, and their paper should furnish results which could be directly compared with those of the present author.

*Discussor:* Milton Van Dyke, Stanford University

It appears that in considering a supersonic transport one requires a nonlinear theory. In view of his earlier investigations into second-order theory, could the speaker discuss the possibility of incorporating nonlinear effects into his scheme? For example, would it not be necessary to construct yet a third asymptotic expansion valid in the neighborhood of the Mach cone?

*(Author did not reply.)*

